l'École Nationale Supérieure des Ingénieurs des Études et Techniques d'Armement

MATHÉMATIQUES 1 Options M, P et TA

Étant donnée une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, on dit que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ existe si, et seulement si, les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ convergent ; on pose alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}.$$

Dans la suite, on associe, sous réserve d'existence, à toute application f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ les fonctions Φ_f et $\hat{f}$ définies pour tout x réel par :

$$\Phi_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) \quad \text{et} \quad \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi ux}du.$$

I - ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Dans toute cette partie, on désigne par f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\pi|x|}$ et on se propose de déterminer le développement en série de Fourier de la fonction associée Φ_f.

1 - Établir l'existence de $\Phi_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi|x+n|}$ pour tout x réel.

2 - a - Démontrer que Φ_f est 1-périodique.

b - Étudier la parité de Φ_f.

3 - Prouver que pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ $\Phi_f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}\left[\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{2}\right]}$ et donner l'allure de la courbe représentative de Φ_f dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

•

4 - a - Déterminer les coefficients de Fourier de l'application g 2π-périodique qui coïncide avec $t \mapsto \operatorname{ch}\frac{t}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$. g est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

b - En déduire que pour tout x réel : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi|x+n|} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{4n^2+1}$ (1)

II - LA FONCTION THETA DE JACOBI

L'objet de cette partie est l'étude de la fonction θ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t n^2}$. Pour $t \in]0,+\infty[$, on introduit l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f_t(x) = e^{-\pi t x^2}$ et ainsi : $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_t(n) = \Phi_{f_t}(0)$.

1 - a - Établir l'existence de $\theta(t)$ et la relation $\theta(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi t n^2}$.

b - Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} e^{-\pi t n^2}$ converge normalement sur tout intervalle du type $[a,+\infty[$ avec $a > 0$ et en déduire que θ est continue sur $]0,+\infty[$.

Déterminer $\boxed{\lim_{t\to+\infty} \theta(t)}$.

c - Préciser le sens de variation de θ.

2 - a - Établir l'existence de $\Phi_{f_t}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t (n+x)^2}$ pour tout réel x et prouver que Φ_{f_t} est périodique et paire.

b - Soit A un entier naturel strictement positif.

Montrer la convergence normale des séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} e^{-\pi t (x+n)^2}$ et $\sum_{n\geq 1} e^{-\pi t (x-n)^2}$ sur l'intervalle [0, A] et en déduire que Φ_{f_t} est continue sur $\mathbb{R}$.

Établir de même que Φ_{f_t} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c - Montrer que pour p entier relatif, l'intégrale $\hat{f}_t(p)$ est convergente et qu'elle est égale au coefficient de Fourier exponentiel d'indice p de la fonction 1-périodique Φ_{f_t}.

En déduire que pour tout $t \in]0,+\infty[$ $\quad \theta(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_t(p)$ (2).

3 - Évaluation de $\hat{f}_t(0)$.

Pour $r > 0$, on pose :

$D_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2\right\}$ et $\Delta_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq r \text{ et } |y| \leq r\right\}$.

Calculer $\boxed{\iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}dxdy}$ et après avoir comparé les intégrales $\iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, $\iint_{D_{2r}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, $\iint_{\Delta_r} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. En déduire $\boxed{\hat{f}_t(0)}$.

4 - Évaluation de $\hat{f}_t(p)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, x étant réel, on note : $\hat{f}_{t,n}(x) = \int_{-n}^{n} f_t(u)e^{-2i\pi ux}du$.

a - Prouver que $\hat{f}_{t,n}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\boxed{\hat{f}'_{t,n}(x)}$.

b - Montrer que $(\hat{f}_{t,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $\hat{f}_t$ sur $\mathbb{R}$. En déduire la continuité de $\hat{f}_t$ sur $\mathbb{R}$.

c - On pose $g_t(x) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} u\, f_t(u)e^{-2i\pi ux}du$. Établir la convergence de cette intégrale et montrer que $g_t(x) = \dfrac{-2\pi x}{t}\hat{f}_t(x)$.

Prouver que $\hat{f}_t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\pi x}{t}\,y.$$

d - En déduire une expression de $\boxed{\hat{f}_t(x)}$ en fonction de $\hat{f}_t(0)$.

A l'aide de la relation (2), montrer que pour $t \in]0,+\infty[$ $\quad \theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Préciser un équivalent de θ au voisinage de 0.

III - LA FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

Dans cette partie, on suppose que f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que les séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} f(x+n)$ et $\sum_{n\geq 1} f(x-n)$ convergent normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

1 - a - Étudier la continuité et la périodicité de Φ_f et de $x \mapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+n)|$.

b - Montrer que pour tous les entiers relatifs p et q vérifiant $p \leq q-1$ on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=p}^{q-1} |f(x+n)|\,dx = \int_p^q |f(u)|\,du.$$

Établir l'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du$ et en déduire que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

c - Montrer que le coefficient de Fourier exponentiel d'indice $p \in \mathbb{Z}$ de Φ_f, c'est-à-dire $\int_0^1 \Phi_f(x)e^{-2i\pi xp}dx$, est égal à $\hat{f}(p)$.

2 - On suppose de plus que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|$ est convergente.

Montrer que l'application F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$ existe et est continue. Comparer les coefficients de Fourier de F et de Φ_f. A l'aide de la formule de Parseval appliquée à $F-\Phi_f$, en déduire la relation :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx} \qquad (3).$$

Application : lorsque $f(x) = e^{-\pi|x|}$, calculer pour tout entier relatif n $\boxed{\hat{f}(n)}$ et retrouver la relation (1).

3 - On suppose enfin dans cette question que les séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} \hat{f}(x+n)$ et $\sum_{n\geq 1} \hat{f}(x-n)$ convergent normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$. On introduit à t réel fixé l'application notée $\tilde{f}_t : x \mapsto f(x)e^{-2i\pi tx}$.

a - Montrer que pour tout réel y on a : $\hat{\tilde{f}}_t(y) = \hat{f}(t+y)$.

b - En appliquant la relation (3) à $\tilde{f}_t$, prouver que pour tous t et x réels :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)e^{-2i\pi tn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t+n)e^{2i\pi(n+t)x}.$$

c - En déduire que pour tout x réel, $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{2i\pi xy}dy$ (4).

d - Application : lorsque $f(x) = e^{-\pi|x|}$, déterminer l'application $\boxed{\hat{f}}$ et à l'aide de la relation (4), établir que pour tout x réel :

$$\frac{\pi}{4} e^{-\pi|x|} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi xy)}{4y^2+1}\,dy.$$

Exprimer à l'aide de fonctions usuelles $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4(x+n)^2+1}}$.